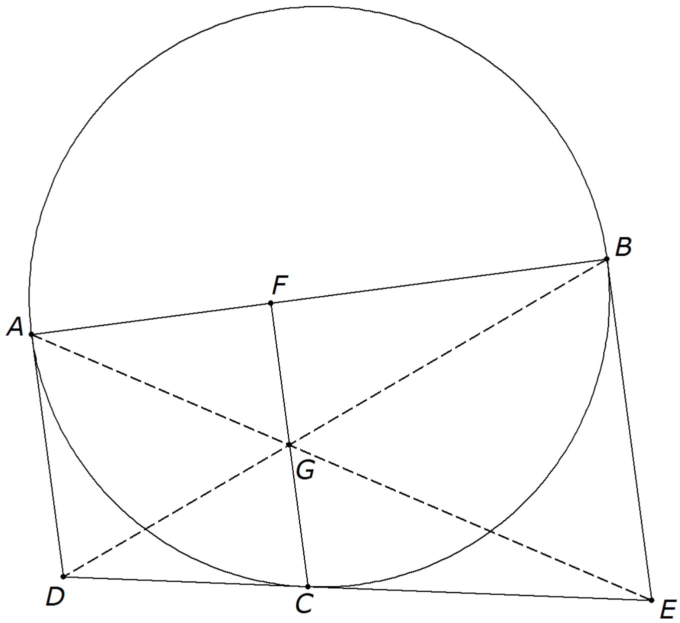
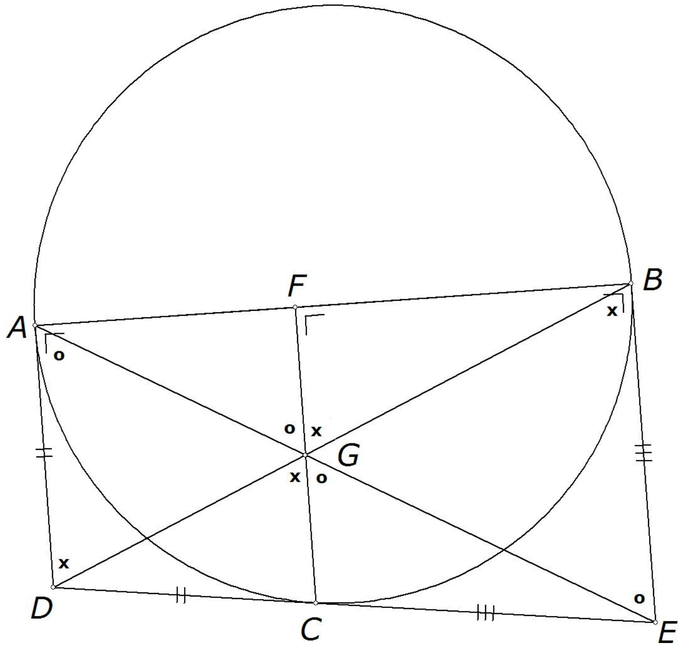
Jaarvergadering november 2014
[Ton Lecluse]

Jaarlijks deel ik op de jaarvergadering een opgave uit. Van de ingezonden uitwerkingen wordt dan een mooi artikel gemaakt voor de oude doos serie.
Dit jaar was de opgave, deels afkomstig uit het Leerboek der Vlakke Meetkunde IV van H.A. Derksen en G.L.N.H. de Laive (leraren van de HBS Nijmegen) uit 1913:

> In de uiteinden van de middellijn *AB* aan een gegeven cirkel worden raaklijnen getrokken aan deze cirkel.
> De raaklijn in een derde punt *C* op de cirkel snijdt de andere twee raaklijnen in *D* en *E*.
> *F* is de loodrechte projectie van *C* op *AB*.
> Zie figuur.
>
> 
>
>
> Opgave a
> Bewijs dat de lijnen *CF, AE* en *BD* door één punt *G* gaan.
>
> Opgave b
> Bewijs dat *G* het midden is van *CF*.

de gegeven figuur bevat natuurlijk al enkele voor de hand liggende eigenschappen: *AB* is middellijn, dus $AD \perp AB$ en $BE \perp AB$, dus $AD // CF // BE$.
De rechte hoeken en gelijke hoeken die uit deze evenwijdigheid volgen, zijn in de tekening hieronder alvast aangegeven. In het vervolg gebruiken we deze gelijke hoeken, evenwijdigheden en gelijke raaklijnstukken zonder deze steeds opnieuw te moeten bewijzen.

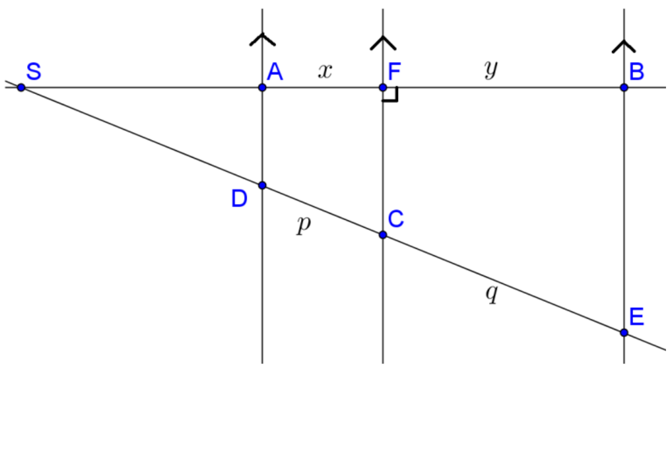


Oplossingen kwamen binnen van Aad Goddijn, Quintijn Puite, Jan Otto Kranenborg, Wouter van Orsouw, André van den Berg, Sjoerd Zondervan, Kees Rijke en Cor Oosterom.

De oplossers geven niet alleen een fraai bewijs, maar verwoorden ook hun gedachtegang, en deze is bijzonder leerzaam. Natuurlijk zien we dezelfde ingrediënten (gelijke raaklijnstukken aan cirkels, gelijkvormigheid) bij meerdere oplossers terugkomen, maar de beschrijving van hun beleving is toch grappig verschillend.

Laten we beginnen met de bespreking van vraag b. Deze komt bij alle inzenders neer op hetzelfde principe, maar er zijn toch kleine verschillen in hoe men het gebruikte gereedschap inzet.
Je kunt bijvoorbeeld de volgende stelling inzetten. Ik citeer Jan Otto:

> Als twee snijdende lijnen (loodrecht) gesneden worden door drie evenwijdige lijnen, dan zijn de verhoudingen van de afgesneden lijnstukken gelijk.



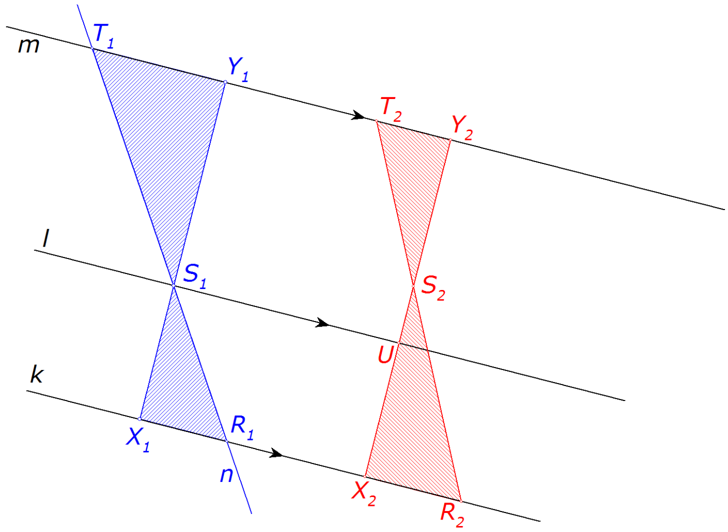
Deze stelling zegt dus

$$x : y = p : q.$$

Grappig is dat inzenders hierbij verschillende formuleringen gebruiken. Zo spreekt die van André me erg aan:

> De lijnen *k*, *l* en *m* zijn evenwijdig, *l* ligt tussen *k* en *m*. De afstand van *k* tot *l* noemen we *p*, de afstand van *l* tot *m* noemen we *q*. Nu nemen we een lijn *n* die *k* in *R* en *m* in *T* snijdt. Laat *S* een punt op *n* zijn dat ligt tussen *R* en *T*. Dan geldt:
> Lemma A. Als *S* op *l* ligt, dan $RS : ST = p : q$
> Lemma B. Als $RS : ST = p : q$ dan ligt *S* op *l*
> Een bewijs: teken een lijn door *S* loodrecht op de drie evenwijdige lijnen en maak gebruik van de gelijkvormigheid van de twee ontstane rechthoekige driehoeken.

Ik heb het bewijs namens André even uitgeschreven, en er een tekening bij gemaakt:



Bewijs Lemma A: Gebruik het blauwe deel in de tekening hierboven:
Omdat $X_1S_1 : S_1Y_1 = p : q$ is gegeven én de blauwe driehoeken gelijkvormig zijn, geldt ook $X_1S_1 : S_1Y_1 = p : q = R_1S_1 : S_1T_1$
Bewijs Lemma B: Gebruik het rode deel in de tekening hierboven:
Uit lemma A volgt: $X_2U : UY_2 = p : q$, maar ook is gegeven: $R_2S_2 : S_2T_2 = p : q$, en uit de rood gearceerde gelijkvormigheid volgt: $R_2S_2 : S_2T_2 = X_2S_2 : S_2Y_2$
Dus $X_2U : UY_2 = X_2S_2 : S_2Y_2 = p : q$, dus $S = U$.

Hiermee is André snel klaar.

De oplossing van André

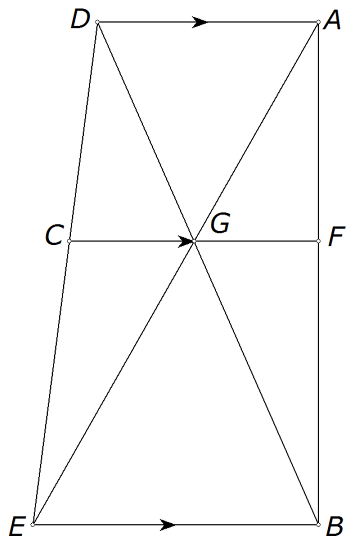
DA, CF en *EB* staan alledrie loodrecht op middellijn *AB*, stel $AF = p$ en $FB = q$, dan hebben we, volgens bovenstaand lemma A, $DC : CE = p : q$, zeg $DC = \lambda p$ en $CE = \lambda q$.
Maar dan geldt ook $AD = \lambda p$ en $BE = \lambda q$ (raaklijnstukken).
We merken op dat $\Delta\ ADG \sim \Delta\ EBG$ (hh, z-hoeken), zodat $AG : EG = AD : EB = p : q$, waaruit mbv lemma B volgt dat punt *G* op *CF* moet liggen.

De andere oplossers geven bij vraag b min of meer hetzelfde bewijs.
Aad formuleert het bewijs van vraag b in het kort:
GC = *GF* is een standaard opgave in trapezia:

> In een trapezium *EBAD* (met *EB* // *AD*) is *G* het snijpunt van de diagonalen.
> De lijn door *G* evenwijdig aan *EB* snijdt de opstaande zijden in C en F.
> Te bewijzen: *CG* = *GF*.

Je hebt alleen *AD* // *BE* // *FC* nodig:
GC : *BE* = *DC* : *DE* = *AF* : *AB* = *FG* : *BE*.

Naschrift (van Ton): Wanneer je dit bewijs op alleen gelijkvormige driehoeken baseert ziet dit er bijvoorbeeld als volgt uit:



$\Delta DAG \sim \Delta BEG$, stel de vergrotingsfactor is *a*.

$$\Delta DCG \sim \Delta DEB \;\Rightarrow \frac{CG}{EB} = \frac{DG}{DB} = \frac{DG}{DG+GB} = \frac{DG}{DG + a \cdot DG} = \frac{1}{1+a}$$

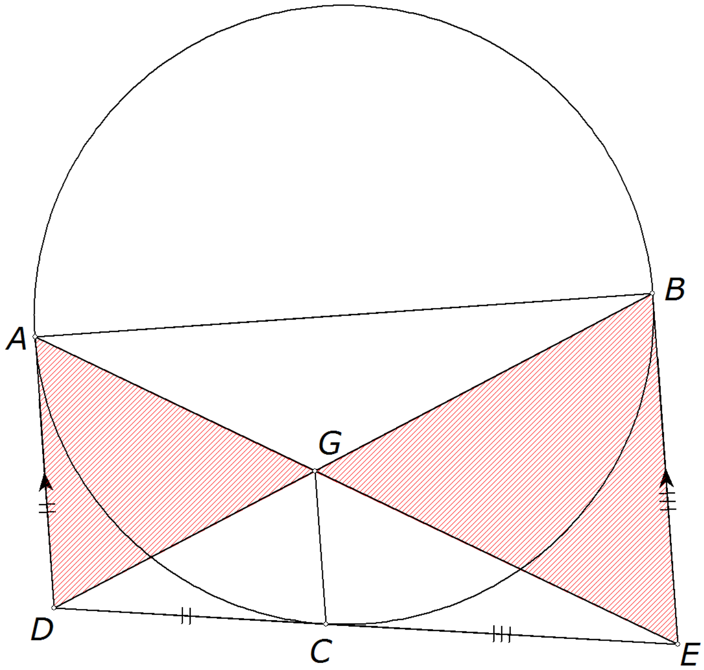
$$\Delta AGF \sim \Delta AEB \;\Rightarrow \frac{GF}{EB} = \frac{AG}{AE} = \frac{AG}{AG+GE} = \frac{AG}{AG + a \cdot AG} = \frac{1}{1+a}$$

Dus $\frac{CG}{EB} = \frac{GF}{EB}$, dus $CG = GF$

De bewijzen van vraag a

De oplossing van Aad

Aad heeft natuurlijk veel ervaring met een beetje verdraaien van de vraag, omdat hij wel weet, dat je de bijzondere relaties in de figuur moet vinden en niet alleen moet focussen op de bewering van het eindresultaat.
Voor de lezer formuleert Aad het dan wat bruut: vergeet *F*.



Je weet nu dus nog niet dat $CG \perp AB$

In dit geval is (in Aads oplossing) de feitelijke sleutel het feit dat raaklijnstukken vanuit een punt aan een cirkel gelijk zijn. Ook dat is natuurlijk ervaring; in een van je opgaven in je wiskundig leven moet je gezien hebben dat dat werkt. Als je dat dan ergens anders herkent, heb je een kern gevonden.
Daarna komen de standaarddingen, verhoudingen en zo.

AD = *DC* en *CE* = *EB*
Vanwege de evenwijdigheid $AD // BE$ zijn de driehoeken *ADG* en *EBG* gelijkvormig;
Dus *DG : GB* = *AD : BE* = *DC : CE*.
Dus zijn de driehoeken *DCG* en *DEB* gelijkvormig (*zhz*).
Dus *GC // BE*.
Trek *GC* door en dat snijdt met *AB* loodrecht. In, dat is, ja, *F*.

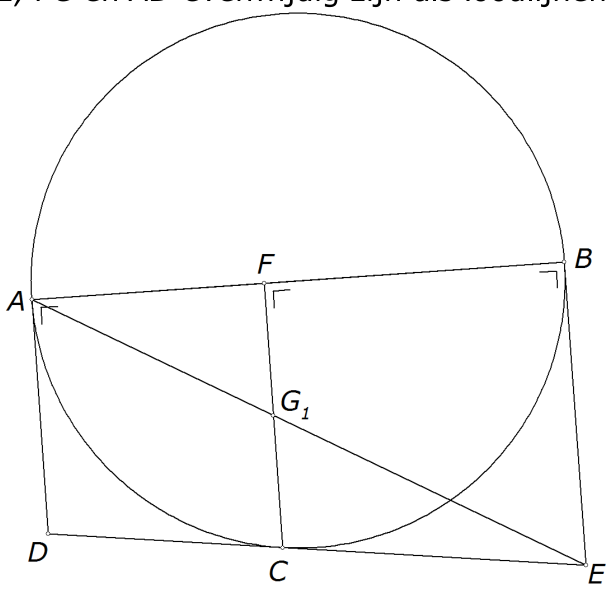
Sjoerd geeft in principe (zonder F weg te laten) hetzelfde bewijs als Aad. Ook geeft Sjoerd een formulering van de opgave die hapklaar is voor klasgebruik, verderop.

De oplossing van Quintijn

Citaat:
Ik heb even wat heftigere stellingen als Desargues, Pappos, Ceva en Meneloas door m'n hoofd laten gaan, maar heb het probleem vervolgens erg elementair bewezen. Een van de strategieën die we onze olympiadeleerlingen leren om te bewijzen dat drie lijnen l1, l2 en l3 concurrent zijn, is te bewijzen dat lijn l2 lijn l1 in hetzelfde punt snijdt als waar lijn l3 lijn l1 snijdt. (Het klinkt triviaal, maar het bepaalt toch je aanpak. Een voorbeeld: waarom snijden voor een driehoek ABC de bissectrice van hoek A en de middelloodlijn van zijde BC elkaar op de omcirkel van de driehoek? Omdat elk van beide door het midden van boog BC gaat.)

Nu spelen *AE* en *BD* in dit probleem een symmetrische rol, dus ik neem deze als l2 en l3, en voor l1 neem ik juist *FC*.

Merk op dat *BE, FC* en *AD* evenwijdig zijn als loodlijnen op de middellijn *AB*.



Bekijk eerst het snijpunt van *AE* en *FC*; dat noem ik G_1.

Er *geldt* $FG_1/BE = AG_1/AE = DC/DE = DA/DE$, dus $FG_1 = BE*DA/DE$.

(Uitleg eerste =-teken: gelijkvormigheid driehoeken AFG_1 en *ABE*;
uitleg tweede =-teken: gelijkvormigheid driehoeken EG_1C en *EAD*;
uitleg derde=-teken: gelijke raaklijnstukjes *DC=DA* en *EC=EB*.)

Zo vinden we ook $CG_1/DA = CE/DE = BE/DE$, dus $CG_1 = DA*BE/DE$.

We zien dat CG_1en FG_1 even lang zijn, dus G_1 is het midden van *FC*!

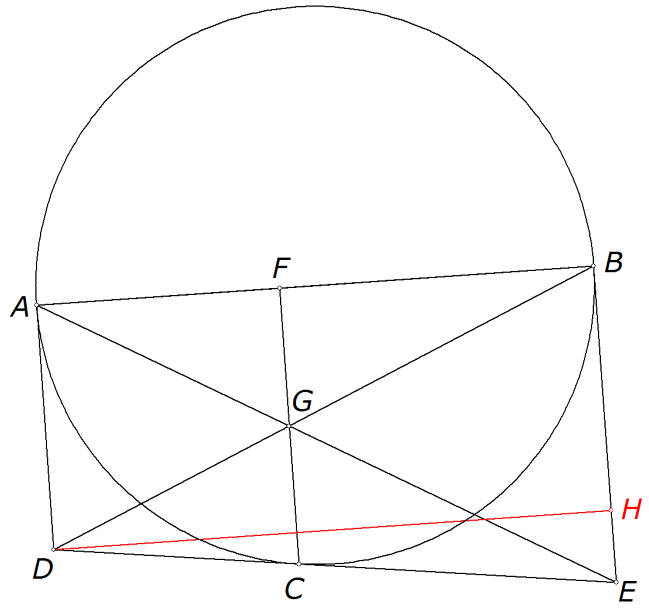
Geheel analoog zien we dat G_2, het snijpunt van *BD* en *FC*, ook het midden is van *FC*.

Dus de drie lijnen zijn concurrent. En onderdeel (b) hebben we en passent ook gedaan; in zekere zin werkte dit onderdeel zelfs als een hint voor mij bij mijn aanpak voor onderdeel (a).

Ik kwam hierop doordat ik lijnstuk op twee manieren op lijnstuk *FC* terugzak: als FG_1 (puntvermenigvuldiging vanuit *A*) en als G_2C (puntvermenigvuldiging vanuit *D* met dezelfde factor). Uitschrijven van deze observaties en bedenken dat je net zo goed *AD* op twee manieren terug ziet (puntvermenigvuldiging vanuit *B* resp. vanuit *E* met weer een zelfde factor) leidde tot bovenstaande.

De oplossing van Kees

Vul driehoek *ABD* aan tot een rechthoek met het vierde hoekpunt *H* op lijnstuk *BE*.



Met behulp van driehoek *EHD* zie je dat : $FC = AD + \frac{DC}{DE}(BE - AD)$.

Verder geldt in driehoek *ABE* : $FG = \frac{AF}{AB} \cdot BE$ en dus geldt ook : $FG = \frac{DC}{DE} \cdot BE$

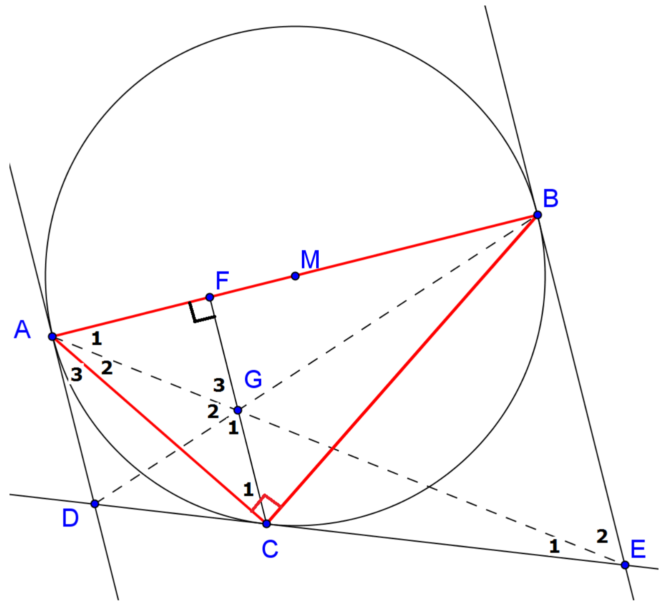
Bewezen moet worden : $FC = 2 \cdot FG$ ofwel $AD + \frac{DC}{DE}(BE - AD) = 2 \cdot \frac{DC}{DE} \cdot BE$.

Omdat $DC = AD$ en $DE = AD + BE$ (raaklijnstukken vanuit *D* en *E*) moet aangetoond worden dat $AD + AD \cdot \frac{BE - AD}{BE + AD} = 2 \cdot AD \cdot \frac{BE}{BE + AD}$.

Weglaten van de factor AD en vermenigvuldigen met $BE + AD$ geeft :
$BE + AD + BE - AD = 2 \cdot BE$ en dat klopt natuurlijk !

De oplossing van Jan Otto

In de uiteinden van de middellijn *AB* van een gegeven cirkel worden raaklijnen getrokken. De raaklijn in een derde punt *C* op de cirkel snijdt de andere twee raaklijnen in *D* en *E*.
F is de loodrechte projectie van *C* op *AB*.



a) Te bewijzen: *CF*, *AE* en *BD* gaan door één punt *G*.

Bewijs: Voor het gemak nummer ik enkele hoeken. Zie tekening.
G is het snijpunt van *AE* en *BD*; als *CF* door *G* moet gaan, moet $\angle CGF$ gestrekt zijn.
Ik bewijs dat $\angle CGA + \angle FGA = 180^0$. Ofwel: $\angle G_{12} + \angle G_3 = 180^0$.

$\angle G_{12} = 180^0 - \angle A_2 - \angle C_1$ (hoekensom driehoek).

$\angle G_3 = (\angle E_2 =)\ \angle A_{23}$ (F hoeken; Z hoeken, omdat *BE* // *FC* // *AD*).

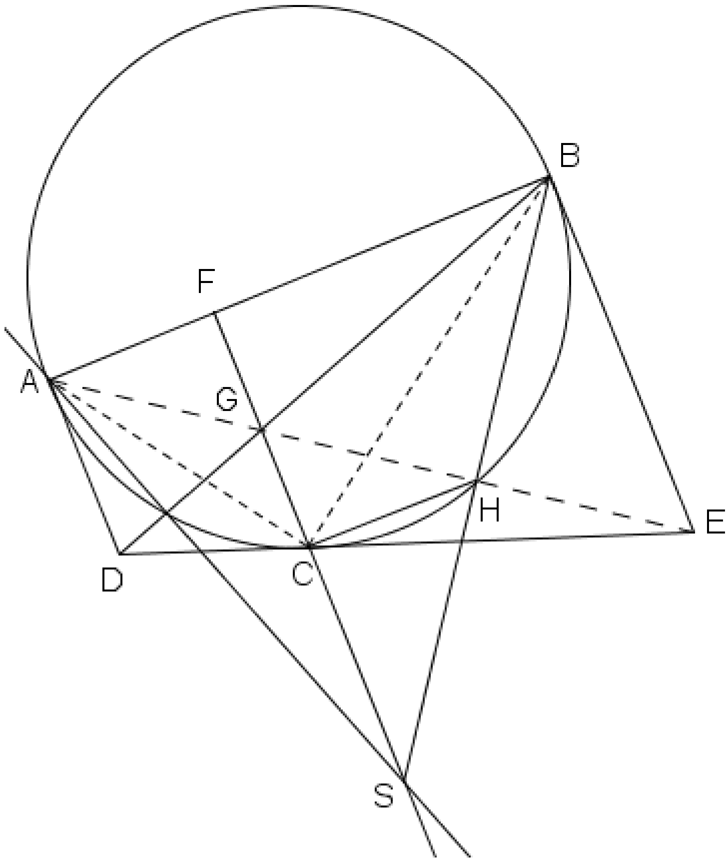
Dan is $\angle G_{12} + \angle G_3 = 180^0 - \angle A_2 - \angle C_1 + \angle A_{23} = 180^0 - \angle C_1 + \angle A_3 = 180^0$, want wegens *CF* // *AD* geldt dat $\angle C_1 = \angle A_3$ (Z hoeken).

Opmerking: nergens gebruik ik de stelling van Thales; wel gebruik ik dat *AD* // *FC* // *BE*. En dat komt omdat een raaklijn loodrecht op de raakstraal van de cirkel staat. Dus hier: $AD \perp AB$, $BE \perp AB$; vanwege $\angle CFA = 90^0$, geldt *CF* // *AD*.

De oplossing van Wouter

<u>Te bewijzen:</u>
CF, *AE* en *BD* gaan door één punt *G.*

<u>Bewijs:</u>
Laat *G* het snijpunt zijn van *CF* en *BD*, dan rest te bewijzen dat *AE* door *G* gaat.
Teken de loodlijn door *A* op *BD*, deze lijn snijdt het verlengde van *CF* in punt *S*.
Teken lijnstuk *BS*. Het snijpunt van *BS* en *AE* noemen we *H*.
Teken ook de lijnstukken *CH*, *AC* en *BC*.
Zie de nieuwe figuur hiernaast.



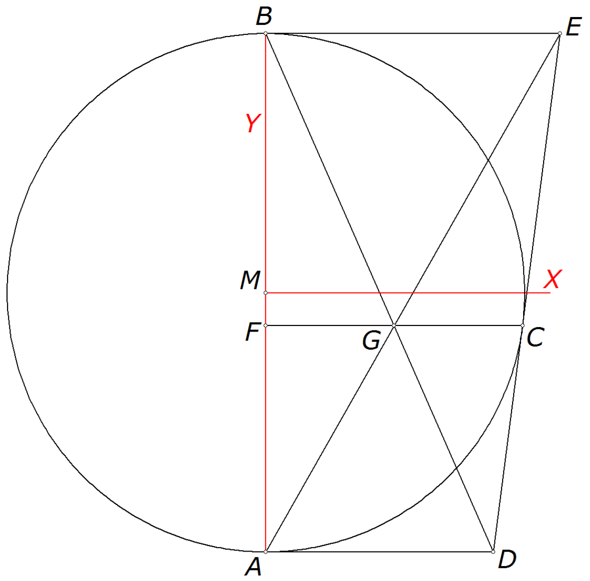
Er geldt:
1) $\angle HAB = \angle HCB$
(constante hoek)
2) $\angle CAH = \angle CBH$
(constante hoek)
3) $\angle HCB + \angle CBH + \angle BHC = 180^\circ$
(hoekensom driehoek)
4) $\angle HAB + \angle CAH + \angle BHC = 180^\circ$
(uit 1, 2 en 3)
5) $\angle BAC + \angle BHC = 180^\circ$

Dus *ACHB* is een koordenvierhoek, dus *H* ligt op de cirkel *c* door *A*, *B* en *C.*
AB is de middellijn van *c*, dus $\angle AHB = 90^\circ$ (Thales).

Dus $AE \perp BS$. Per constructie geldt ook $BD \perp AS$ en $FS \perp AB$.
Hieruit volgt dat *AE*, *BD* en *FS* de hoogtelijnen van driehoek *ABS* zijn, dus gaat *AE* door punt *G* (hoogtelijnen driehoek).

Ton's eerste analytische variant: met gonio

Het is ook mogelijk, en voor de hand liggend, de opgave analytisch aan te pakken. Ingrediënten: de cirkel (die als eenheidscirkel kan worden ingezet), en twee richtingen die loodrecht op elkaar staan: de richtingen van de assen. Opgave a als b kunnen gelijktijdig worden aangepakt. Zie figuur.



Kies het middelpunt *M* van de cirkel als oorsprong, en *AB* als verticale as. Beschouw de cirkel als eenheidscirkel, dus met straal 1, en noem $\angle XMC = \alpha$.

Van een aantal punten weten we de coördinaten:

$M = (0;0) \quad A = (0;-1) \quad B = (0;1) \quad C = (\cos(\alpha);\sin(\alpha))$

We gaan nu narekenen dat *G* coördinaten $(\frac{1}{2}\cos(\alpha);\sin(\alpha))$ heeft.

Eerst berekenen we de coördinaten van *D* en *E*, door de horizontale lijnen *AD* en *BE* elk te snijden met de raaklijn in *C*. Daarna vinden we de coördinaten van *G* door de lijnen *AE* en *BD* te snijden. We drukken alles in α uit. Natuurlijk voegt u zelf de tussenstappen toe.

(1) $rico_{MC} = \tan(\alpha)$, dus $rico_{ED} = -\dfrac{1}{\tan(\alpha)}$, zodat de raaklijn in *C* als vergelijking

$y - \sin(\alpha) = -\dfrac{1}{\tan(\alpha)}(x - \cos(\alpha))$ heeft, oftewel $\cos(\alpha)\cdot x + \sin(\alpha)\cdot y = 1$

(2) snijden met *AD*, waarvoor $y = -1$ geldt, geeft: $D = \left(\dfrac{1+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)};-1\right)$

(3) snijden met *BE*, waarvoor $y = 1$ geldt, geeft: $E = \left(\dfrac{1-\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)};1\right)$

(4) Lijn *AE* heeft vergelijking $y = \dfrac{2\cos(\alpha)}{1-\sin(\alpha)}\cdot x - 1$

(5) Lijn *BD* heeft vergelijking $y = \dfrac{-2\cos(\alpha)}{1+\sin(\alpha)}\cdot x + 1$

(6) Deze lijnen gelijk stellen geeft (na enige gonio-algebra):
$x_G = \frac{1}{2}\cos(\alpha)$ en $y_G = \sin(\alpha)$

Dus is inderdaad *G* het midden van *FC*.

Ton's tweede analytische variant: zonder gonio

C ligt op de cirkel $x^2 + y^2 = 1$, dus $C = \left(a; -\sqrt{1-a^2}\right)$ (in de gegeven figuur).

Neem dezelfde rekenstappen als hierboven; ik volsta met de resultaten per stap:

(1) raaklijn in *C* heeft vergelijking $a \cdot x - \sqrt{1-a^2} \cdot y = 1$

(2) $D = \left(\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}; -1\right)$

(3) $E = \left(\dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}; 1\right)$

(4) Lijn *AE*: $y = \dfrac{2a}{1+\sqrt{1-a^2}} \cdot x - 1$

(5) lijn *BD*: $y = \dfrac{-2a}{1-\sqrt{1-a^2}} \cdot x + 1$

(6) *AE* en *BD* gelijkstellen geeft: $G = \left(\tfrac{1}{2}a; -\sqrt{1-a^2}\right)$

Hierboven is aangenomen dat *C* in het vierde kwadrant ligt. U rekent natuurlijk even na dat het ook klopt indien *C* in het eerste kwadrant ligt.

Analytisch (Cor)

Cor kiest *AB* als horizontale en *AD* als verticale as. Door met meer variabelen te werken dan Ton ziet de berekening er eenvoudiger uit.

Opg a. Het ingevoerde assenstelsel is als volgt :

A(0,0), *B*(2,0), *D*((0,d), *C*(e,f), *E*(2,g)

Cirkelvergelijking : $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

AD = *DC* geeft : $d^2 = e^2 + (f-d)^2$

C op de cirkel : $(e-1)^2 + f^2 = 1$

Combinatie levert op : $d = \dfrac{e}{f}$

Vergelijking *AE* : $y = \dfrac{g}{2} \cdot x$ en vergelijking *BD* : $y = -\dfrac{d}{2} \cdot x + d$

CE = *EB* geeft (na enige herleiding, gebruik makend dat *C* op de cirkel ligt) :

$g = \dfrac{2-e}{f}$

$x = e$ voldoet inderdaad aan beide lijnvergelijkingen.

Opg b.

Te bewijzen : $\dfrac{g}{2} \cdot e = \tfrac{1}{2} f$ met $g = \dfrac{2-e}{f}$

Analoog leidt dit tot de identiteit : $e(2-e) = f^2 = 2e - e^2$

Sjoerd vertaalt ook de opgave naar een analytische context die geschikt is voor de huidige klas:

Kies de cirkel $x^2 + (y-10)^2 = 100$ met de raaklijnen $y = 0, y = 20$ en $4x + 3y = 80$.
Dit geeft dan de punten *A* (0,0) , *B* (0,20) , *C* (8,16) , *D* (20,0) en *E* (5,20).
Je kunt eventueel de coördinaten van *C* , *D* en *E* laten afleiden.
En vervolgens de dezelfde opgaven a en b nemen.

Sjoerds formulering is natuurlijk equivalent aan die van Cor en Ton, maar hapklaar voor gebruik in de klas in het nieuwe programma.

Naschrift

Keien zoals oplossers hierboven weten veel van meetkunde.

Quintijn eindigt met een toetje: Wat ook nog aardig is bij dit plaatje: dat *DC*CE* en dus ook *DA*BE* constant is. Dat kun je bijvoorbeeld inzien door het middelpunt *M* (midden van *AB*) erbij te betrekken en de hoogtelijnstelling te gebruiken in de rechthoekige driehoek *DME (DC/CM=CM/CE*, dus *DC*CE=CM*^{2}). Met onze zojuist afgeide formule $CG_1 = DA*BE/DE$ zien we dus dat de lengte van *CF* (= $2*CG_1$) omgekeerd evenredig is met *DE*.
Ook kreeg ik snel na Quintijn's oplossing een tweede email van hem, die getuigt van een brede meetkundebasis:

Ik bedacht me later dat onderdeel a ook een heel direct gevolg is van de stelling van *Brianchon*. Noem de raaklijnen door *A, B* en *C* aan de gegeven cirkel achtereenvolgens *a, b* en *c*. Als je dan de stelling van Brianchon toepast op de (gedegenereerde) raaklijnenzeszijde aabbcc, dan krijg je dat de drie lijnen

(ana)(bnc) = AE　　　*(bnb)(cna) = BD*　　　*(cnc)(anb) = C(anb) = CF*

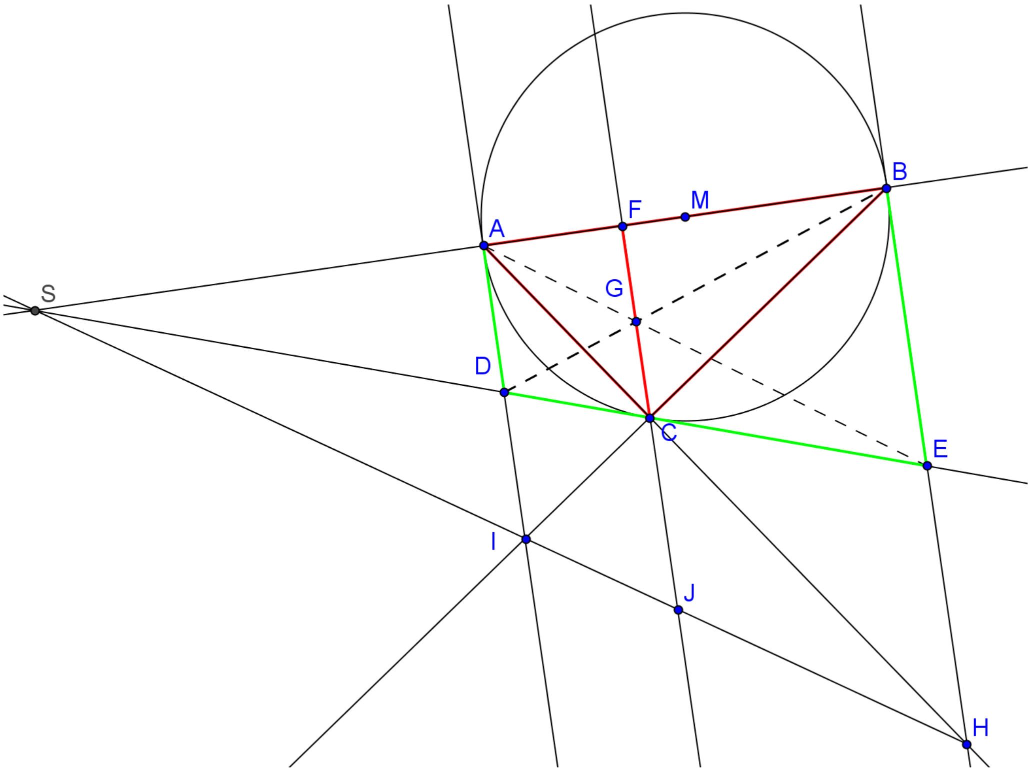
concurrent zijn; klaar. (Ik gebruik hier het tekentje *n* voor het snijpunt van twee lijnen.)

Merk op dat het snijpunt *anb* van *a* en *b* het gemeenschappelijke oneigenlijke punt van deze twee evenwijdige lijnen is, en dat *CF* daar ook doorheen gaat. Dat verklaart *(cnc)(anb) = C(anb) = CF*.

Deze bijzondere toepassing van de stelling van *Brianchon* (niet op een echte raaklijnenzeszijde abcdef maar op de gedegenereerde raaklijnenzeszijde *aabbcc*) wordt ook wel de stelling van *MacLaurin* genoemd. Als de bijbehorende kegelsnede een cirkel is (zoals hier) en de drie raaklijnen een driehoek vormen (dat is hier niet zo, tenzij je een oneigenlijk punt als hoekpunt accepteert), is *G* in feite het punt van *Gergonne*: het snijpunt van de drie lijnen van *Gergonne* die elk hoekpunt van de driehoek met het overliggende raakpunt van de ingeschreven cirkel verbinden.

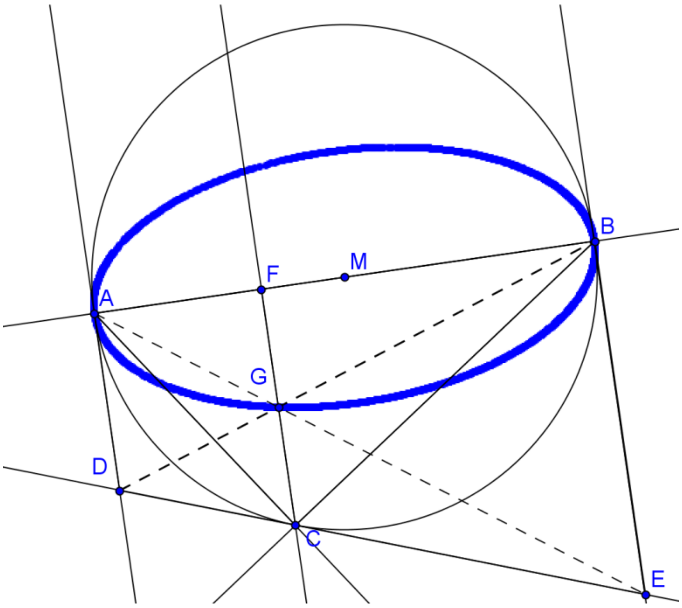
Lezers, u kunt aan de slag; Vul de namen in van bovenstaande wiskundigen bij Google, en geniet.

En ook Jan Otto heeft een toetje:
Verder zijn er nog wel wat aardige opmerkingen te maken:



Niet alleen is *G* het midden van *CF*, maar zijn ook *D*, *C* en *E* de middens van respectievelijk *AI*, *FJ* en *BH*.

Wat Jan Otto ook nog aardig vindt, is het spoor van punt *G* als *C* varieert:



Het lijkt erop dat het spoor van G een ellips is; een leuke opdracht voor de leerlingen om dit te bewijzen.
Het bewijs (van Sjoerd) volgt heel snel uit *CG* = *GF* en beetje analytische meetkunde:
Kies *M* als oorsprong, de x-as langs *AB* en laat de cirkel de eenheidscirkel zijn:
$x^2 + y^2 = 1$. *C* heeft dan de coördinaten $(x, \sqrt{1-x^2})$.

G is het midden van *CF*, dus $G = \left(x, \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right)$

Dus de verzameling van punten *G* heeft als vergelijking $x^2 + 4y^2 = 1$.

De oplossers:

Aad Goddijn (Freudenthal Instituut Utrecht)

Quintijn Puite (Lerarenopleiding Hogeschool Utrecht, Wiskunde Olympiade)

Jan Otto Kranenborg (docent wiskunde aan het Carolus Clusius College Zwolle)

Wouter van Orsouw (docent wiskunde, Mondriaan College Oss)

André van den Berg (oud-docent wiskunde aan de Technische Universiteit Delft)

Cor Oosterom (oud conrector van het Vlietlandcollege in Leiden en wiskundedocent)

Kees Rijke (oud-docent wiskunde aan de Gereformeerde Scholengemeenschap te Rotterdam))

Ton Lecluse (docent wiskunde, Hooghelandt College Amersfoort)

Sjoerd Zondervan (oud-docent wiskunde, Bornego College Heerenveen)

Ton Lecluse (a.lecluse@casema.nl) (docent wiskunde aan het Hooghelandt College te Amersfoort)